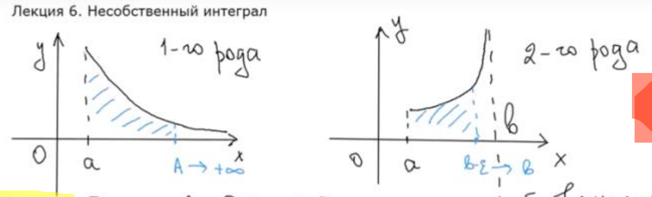
Лекция 6. Несобственный интеграл



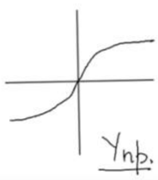
Опр. 1 Пусть $f\in R[a,A]$ $\forall A>a$. Несобственным интегралом 1-го рода от ф-ции f на $[a,+\infty)$ наз-ся выражение $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\,dx$.
Если предел в правой части сущ-т, то говорят, что инт-л сходится, иначе — расходится.

Аналогично $\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to0+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$,
если $f\in R[a+\varepsilon,b]$ $\forall\varepsilon\in(0,b-a)$, но $f\notin R[a,b]$.
Точка a — особая.
Если особая точка $c\in(a,b)$, то по опр-ю
$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon_1\to0+0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx+\lim_{\varepsilon_2\to0+0}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx.$$
Инт-л слева сх-ся $\Leftrightarrow$ оба предела в правой части сущ-т и конечны.

3) $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$. Тогда $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ сх-ся.

Д-во: Рассм. случай, когда g не возр-т (другой случай — аналогично). Возьмем $\varepsilon>0$. $\exists B(\varepsilon)>a$, т.ч. $\forall x>B$: $0\le g(x)<\frac{\varepsilon}{2M}$. Тогда $\forall A_1,A_2$, $B<A_1<A_2$:
$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)\,dx\right| \underset{\substack{\text{2-я т. о среднем,}\\ g\ge0 \text{ и } \searrow}}{=} \left|g(A_1)\int_{A_1}^{\xi} f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2M}\Big|\underbrace{\int_a^{\xi} f(x)\,dx}_{|\cdot|\le M}-\underbrace{\int_a^{A_1} f(x)\,dx}_{|\cdot|\le M}\Big| \le \frac{\varepsilon}{2M}\cdot 2M=\varepsilon \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx \text{ сх-ся (кр. Коши)}$$
ч.т.д.

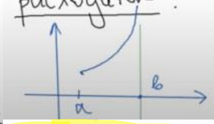
Опр. 2 Главным значением (по Коши) инт-ла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ наз-ся выраж-е:



$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{A\to+\infty}\left(\int_{-A}^{0} f(x)\,dx+\int_0^A f(x)\,dx\right)$$
Упр. Д-те, что если f — нечётная, то $v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=0$.

Т.е. инт-л может расх-ся, но гл. знач-е конечно.

Опр. 1 Пусть ф-ция f определена на $[a,b)$; $f\in R[a,b-\varepsilon]$ $\forall\varepsilon\in(0;b-a)$; $f\notin R[a,b]$.
Интегралом (несобственным) 2-го рода от f на $[a,b]$ наз-ся выражение $\lim_{\varepsilon\to0+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx =: \int_a^b f(x)\,dx$.
Если предел сущ-т (и конечен), то интеграл сходится, иначе — расходится.



Пример: $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx \underset{p\ne1}{=} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_0^1=\begin{cases}\frac{1}{1-p}, & p<1\\ \infty, & p>1\end{cases}$

$p=1$: $\int_0^1\frac1x\,dx=\ln|x|\Big|_0^1=+\infty \Rightarrow$ инт-л сх-ся $\Leftrightarrow p<1$

Т.1 (признак Абеля сх-ти несобств. инт-ла 1-го рода).
Пусть 1) $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится;
2) g определена и монотонна на $[a,+\infty)$;
3) $\exists C>0$, т.ч. $|g(x)|\le C$ $\forall x\in[a,+\infty)$.
Тогда $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ сходится.

Д-во: Возьмем $\varepsilon>0$. $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сх-ся $\Rightarrow \exists B(\varepsilon)>a$ т.ч. $\forall A_1,A_2>B$: $\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2C}$.
Тогда $\forall \tilde A_1,\tilde A_2$, $B<\tilde A_1<\tilde A_2$: $\left|\int_{\tilde A_1}^{\tilde A_2} f(x)g(x)\,dx\right| =$
$$= \left|g(\tilde A_1)\int_{\tilde A_1}^{\xi} f(x)\,dx+g(\tilde A_2)\int_{\xi}^{\tilde A_2} f(x)\,dx\right|<C\cdot\frac{\varepsilon}{2C}+C\cdot\frac{\varepsilon}{2C}=\varepsilon$$
2-я т. о среднем, $\tilde A_1\le\xi\le\tilde A_2$
$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ сх-ся (кр. Коши). ч.т.д.

Т.2 (признак Дирихле) Пусть 1) $f\in R[a,A]$ $\forall A>a$ и $\exists M>0$, т.ч. $\left|\int_a^A f(x)\,dx\right|\le M$ $\forall A>a$;
2) g определена и монотонна на $[a;+\infty)$;

Замеч-е: 1) Все методы интегр-я и признаки сх-ти для инт-лов 2-го рода аналогичны соотв-м утв-ям для инт-лов 1-го рода.
2) Инт-л 2-го рода $\int_a^b f(x)\,dx$, b — особая точка, можно свести к инт-лу 1-го рода заменой $t=\frac{1}{b-x}$.

Для инт-ла 2-го рода (по отрезку $[a,b]$, ос. точка $c\in(a,b)$):
$$v.p.\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to0+0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right)$$
Например, $v.p.\int_{-1}^{1}\frac1x\,dx=0$